

Управление образования администрации
Пермского муниципального округа Пермского края
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Гамовская средняя школа»

**Введение элементов комбинаторики и теории
вероятностей
в обучение младших школьников**

Автор разработки:

Субботина Ольга Анатольевна,
учитель начальных классов
МАОУ «Гамовская средняя школа»,
Пермский МО
osoa32@yandex.ru

с. Гамово - 2024

Аннотация. В статье рассматривается пропедевтика изучения элементов комбинаторики и теории вероятностей на уроках математики в начальной школе. Что необходимо и для формирования функциональной грамотности: умение воспринимать и анализировать информацию, которая может быть представлена в различных формах, производить простые вероятностные расчёты. Изучение элементов комбинаторики позволит ученикам начальных классов рассмотреть различные случаи, переборы и подсчёты количества вариантов, в том числе в простых задачах.

Ключевые слова: нестандартные задачи, комбинаторика, вероятность, виды нестандартных задач, методы решения задач, примеры задач.

Много лет назад я сделала свой выбор и считаю его правильным. Я – учитель начальных классов. В 2005 году я окончила Пермский государственный педагогический университет с отличием по специальности: «Педагогика и методика начального образования».

Еще, будучи студенткой ПГПУ, работала над выпускной квалификационной работой «Изучение элементов теории вероятности и комбинаторики при обучении математике в начальной школе». Прошло уже около 20 лет, а вопрос о решении *нестандартных задач* в начальной школе становится всё более актуальным и востребованным. И не только на уроках математики. А что такое нестандартная задача? Нестандартная задача – это задача, алгоритм решения которой учащимся неизвестен, то есть учащиеся не знают заранее ни способов их решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение.

Младший школьный возраст характеризуется интенсивным интеллектуальным развитием. В данный период происходит развитие всех психических процессов и осознание ребенком собственных изменений, которые происходят в ходе учебной деятельности. Никто не будет спорить с тем, что каждый учитель должен развивать логическое мышление учащихся. Однако, как это делать, учитель не всегда знает. Поскольку все ещё распространённым приёмом в практике является организация учителем действий учащихся по образцу: упражнения тренировочного типа, основанные на подражании и не требующие проявления выдумки и инициативы. В этих условиях у детей недостаточно развиваются такие важные качества мышления как глубина, критичность, гибкость, которые являются сторонами его самостоятельности.

Нередко это приводит к тому, что большинство учащихся, даже старшеклассников, не овладевает начальными приемами логического мышления (анализ, сравнение, синтез, абстрагирование и др.).

Как показывает опыт, в младшем школьном возрасте одним из эффективных способов интеллектуального развития на уроках математики как раз и является решение нестандартных задач. К таким задачам относятся и элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей, которые вновь возвращаются в школьную программу и становятся обязательным компонентом школьного образования. (Например, программа «Элементы статистики и вероятность» в 7-9 классах). А значит мы, учителя начальных классов, можем и должны в свою очередь в качестве пропедевтики вводить

изучение элементов теории вероятностей и комбинаторики на уроках математики. Этот материал необходим и для формирования функциональной грамотности: умение воспринимать и анализировать информацию, которая может быть представлена в различных формах, производить простые вероятностные расчёты. Изучение элементов комбинаторики позволит ученикам рассмотреть различные случаи, переборы и подсчёты количества вариантов, в том числе в простых задачах. И, конечно же, при проведении таких уроков, у учеников формируется устойчивый интерес к изучению математики, развивается интеллект, способность строить прогнозы.

Трудность таких задач обусловлена тем, что они требуют проведения дополнительных исследований и рассмотрения различных вариантов. Здесь не нужны знания теории, выходящие за рамки программы, нужны умения думать, мыслить, догадываться, соображать.

Определенной классификации нестандартных задач не существует. И это не случайно, так как практически невозможно определить единый признак – основание для классификации таких задач. Нестандартные задания по математике, используемые в начальной школе, условно можно разделить на следующие виды:

- задачи на установление взаимно-однозначного соответствия;
- задачи о лжецах;
- задачи, решаемые с помощью логических выводов;
- задачи о переправах;
- задачи о переливаниях;
- задачи о взвешиваниях.

Нестандартные задачи в курсе математики не имеют общих правил. Процесс их решения состоит в последовательном применении двух основных операций:

- сведения путём преобразования или переформулировки нестандартной задачи к стандартной;
- разбиение нестандартных задач на несколько стандартных подзадач.

При решении нестандартных задач используют следующие методы решения:

- алгебраический;
- арифметический;
- графический;
- практический;
- метод предположения;
- таблицы истинности;
- метод перебора.

Наблюдения показывают, что даже при решении несложных нестандартных задач, учащиеся много времени тратят на рассуждения о том, за что взяться, с чего начать. Чтобы помочь учащимся найти путь к решению задачи, мы должны поставить себя на место решающего, попытаться увидеть и понять источник его возможных затруднений. Моя помощь, оставляющая различную долю самостоятельной работы, позволит ученикам развивать логическое мышление, накопить опыт, который в дальнейшем поможет

находить путь решения новых задач. Необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся испытывали радость от решения трудной задачи.

Опыт работы показывает, что для развития интеллектуальных способностей необходимо включать в процесс обучения разнообразные виды нестандартных задач (не ограничиваться материалами, предложенными в учебнике).

Эффективность обучения младших школьников решению нестандартных задач зависит от нескольких условий:

1. Задачи следует вводить в процесс обучения в определенной системе с постепенным нарастанием сложности, так как непосильная задача мало повлияет на развитие учащихся.

2. Необходимо предоставлять ученикам максимальную самостоятельность в поиске решения задач, давать возможность пройти до конца по неверному пути, убедиться в ошибке, вернуться к началу и искать другой, верный путь решения.

3. Нужно помочь учащимся осознать некоторые способы, приемы, общие подходы к решению нестандартных арифметических задач.

На первом этапе учащиеся должны:

1. усвоить процесс решения любой задачи (читаю задачу, выделяю, что известно и что надо узнать);

2. познакомиться с приемами работы над задачей (виды наглядной интерпретации, поиска решения, проверки решения задачи и др.)

На втором этапе учащиеся применяют ранее сформулированные общие приемы в ходе самостоятельного поиска конкретных задач.

Вывод: при поиске решения незнакомой задачи полезно сделать чертеж (рисунок), т.к. он может быть способом решения задачи.

Логика - ключ к решению нестандартных задач. И, безусловно, решение нестандартных математических задач необходимо включать в уроки математики: числовые ребусы и головоломки на смекалку; игры со спичками; танграм; логические задачи; задачи на взвешивание и переливание; умышленно-ложные умозаключения; задачи-шутки; комбинаторные задачи.

Например, в 1 классе при изучении темы «Двузначные числа» можно познакомить с решением задач на «перестановку»: на парте лежат карточки с числами 1, 2, 3. Сколько различных двузначных чисел вы можете составить? Назовите наибольшее число. Назовите наименьшее число. Найдите сумму (разность) наибольшего и наименьшего числа и т.п. При решении этой задачи учащиеся выкладывают из карточек разные двузначные числа, записывают их в тетрадь. Важно обратить внимание учащихся на поиск всех возможных вариантов и не пропустить ни один, увидеть закономерность в переборе, чтобы следующие подобные задания ребята уже решали с помощью рассуждения. Так если даны карточки от 1 до 8, то сколько двузначных чисел можно составить из них? В рассуждении учащиеся фиксируют первую карточку – цифру десятков и начинают подбирать вторую карточку – цифру единиц, получается 7 возможных вариантов. Если поменяем первую карточку, то вариантов с ней будет столько же, как и с первой.

Или при изучении темы «Выше. Ниже» предложить такое задание: Витя и Коля живут в 5-ти этажном доме. Коля живёт выше. На каких этажах могут жить мальчики? Может ли Витя жить на 5 этаже? Почему?

При решении этой задачи можно предложить учащимся сделать рисунок или схематический чертёж к задаче и рассмотреть всевозможные случаи.

Рекомендации: задания направлены не только на отработку понятий «двузначное число», «выше», «ниже», и умения их сравнивать, но и на обучение способам перебора и методам решения комбинаторных задач.

Не только на уроках математики можно предлагать детям такие задания, но и, например, на уроке литературного чтения: какие слоги можно составить из трех букв А, У, Х, если слог состоит из двух букв, и буквы не повторяются?

АУ, УА, ХА

АХ, УХ, ХУ

Во 2 классе при изучении темы «Многочисленные числа»: на доске записаны числа 1, 2, 3. Сколько различных трёхзначных чисел вы можете из них составить, если цифры в числе не повторяются? Какое число будет наибольшим? Назовите наименьшее число.

Рекомендации: учащиеся проговаривают алгоритм получения новых перестановок: один элемент фиксируется, а два других переставляются.

Для разминки на уроке математики, можно взять задачу со сказочным сюжетом: три поросенка Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф решили построить себе домики. Выбрали для этого три места: у реки, в лесу и у пруда. Найди все возможные варианты их размещения.

Рекомендации: результат можно представить в виде таблицы. Идёт отработка умения переставлять и решать задачи с помощью таблицы.

В курсе окружающего мира или в рамках часа общения «Разговоры о важном» можно предложить такое задание: есть три цвета: красный, синий и белый. Раскрась флажки так, чтобы они отличались друг от друга. Сколько разных флажков получилось? Есть ли среди этих флагов российский флаг? Какой?

3 класс. Математика. 1 задача: у Димы 6 яблок. Из них 2 красных и 4 зелёных. Дима съел 3 яблока. Какого цвета могли быть яблоки? Сколько вариантов у тебя получилось?

Рекомендации: в этой задаче важно обратить внимание учеников, что порядок яблок значения не играет, результат будет тот же, если поменять яблоки местами. Начинать решение следует с яблок одинакового цвета.

2 задача: в магазине продают воздушные шары: желтые, зеленые, красные, синие. Какие наборы можно составить из двух разных шаров? Сколько наборов у тебя получилось?

Рекомендации: следует обратить внимание на то, что при выборе двух шаров не имеет значения, какой из них находится справа, а какой слева. Однако при расположении шаров необходимо пользоваться организованным перебором.

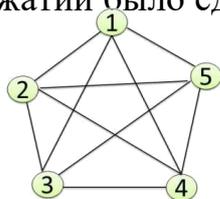
Ещё одна задача со сказочным сюжетом: Поросята Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф нарядились в новые курточки желтого, зеленого и красного цвета.

Наф-Наф надел не желтую и не красную курточку, а Нуф-Нуф никогда не носит одежду желтого цвета. Как были одеты поросята?

Для решения данной задачи вначале предложить ученикам практический способ решения задачи: одеть бумажных поросят в курточки предложенных цветов. Затем подвести к выводу, что это не всегда удобно, если числа будут большие. И ввести для решения таких задач таблицу истинности, т.е. будем отмечать правду и ложь знаками «+» и «-».

	Зеленая куртка	Желтая куртка	Красная куртка
Ниф-Ниф	-	+	-
Нуф-Нуф	-	-	+
Наф-Наф	+	-	-

В 4 классе при изучении темы «Диаграммы. Графики» ученикам предлагается выполнить следующее задание: Однажды встретились пятеро друзей. Каждый, здороваясь, пожал каждому руки. Сделай график и определи, сколько рукопожатий было сделано.



Каждая линия означает 1 рукопожатие.
Всего 10 рукопожатий.

Рекомендации: для решения этой задачи важно объяснить ученикам, что, когда здороваются 1 человек с 5 и наоборот 5 с 1 – это одно и то же рукопожатие и считается за одно. Поэтому решение выглядит так: первый человек пожал руку 4 различным друзьям. Второй человек — 3, третий — 2 и четвёртый - одному. Значит, всего было сделано $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ рукопожатий.

Такие задания пригодятся также при подготовке к ВПР.

4 класс, тема «Цена. Количество. Стоимость». У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста. Как должны встать ребята в очередь, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?

Рекомендации: для решения задачи желательно разыграть сценку, с помощью которой можно найти два возможных варианта решения:

- 1) 50 рублей, 100 рублей, 50 рублей, 100 рублей;
- 2) 50 рублей, 50 рублей, 100 рублей, 100 рублей.

Задачи, которые позволят учащимся познакомиться с элементами теории вероятностей: задача 1: каким является каждое событие: возможным (вероятным) или невозможным (ложным):

- * В 1 вазе 2 яблока, а в другой — 4 яблока, т.е. всего 5 яблок.
- * Карлсон купил 4 тортов, 2 из них съел. Осталась половина тортов.
- * В вазе 7 ромашек и 5 тюльпанов. Если добавить 3 тюльпана, то цветов будет поровну.

* Сегодня четверг, значит, до воскресенья осталось 5 дней.

Задача 2: При каких условиях события будут возможными: на уроке поставили «5»; дети катаются с горы; с дерева падают листья; на небе появилась радуга.

Рекомендации: нужно заострить внимание, чтобы учащиеся обратили внимание, что некоторые события зависят от определённых условий. И напоминает ученикам ещё раз, что нужно внимательно читать текст задачи.

Задача 3. Отметьте, какие из событий являются невозможными:

- При сложении двух однозначных чисел получается трёхзначное число.
- От десятиметрового куска ткани отрезали 13 м. В куске осталось 7 метров.
- От пятикилограммового кочана капусты отрезали половину. Оставшаяся часть весит 1 кг.
- Из двенадцати месяцев весна занимает половину.
- Мама купила 500 г конфет, если купить ещё столько же, то будет 1 кг.

Рекомендации: данные задания можно использовать при закреплении материала по теме «Величины».

Конечно, при работе с такими задачами учитываются некоторые условия:

- такие задачи необходимо регулярно предлагать учащимся на уроках и во внеучебное время;
- при выборе задач нужно учитывать сложности заданий и возрастные особенности младших школьников.

Особенно нравятся учащимся начальных классов (и даже 5-6 классов!) логические задачи со сказочным сюжетом (*приложение*).

Казалось бы, сказка и математика – понятия несовместимые. Но как раз такая форма позволяет удачно ввести детей в мир математики, причём через увлекательные ситуации.

Наблюдения показывают, что даже при решении несложных нестандартных задач, учащиеся много времени тратят на рассуждения о том, за что взяться, с чего начать. Моя помощь, оставляющая различную долю самостоятельной работы, позволяет ученикам развивать логическое мышление, накопить опыт, который в дальнейшем поможет находить путь решения новых задач.

Можно начать знакомство с такими задачами через практические действия при выполнении заданий. Например, при знакомстве с таблицей истинности в ходе решения комбинаторных задач, предложила вначале детям решить задачу практически, «поиграть» с героями задачи (одеть поросят в куртки разного цвета). Так дети незаметно в игровой форме познакомились с понятием «нестандартная задача» и способами её решения.

Планомерное и систематическое решение нестандартных задач постепенно формирует у учащихся способность находить новые способы решения, комбинировать известные.

Памятка

Если тебе трудно решить задачу, то попробуй:

1. Сделать к задаче рисунок или чертеж; подумай, может быть нужно сделать на них дополнительные построения или изменить чертеж в процессе решения задачи.

2. Ввести вспомогательный элемент (часть);

3. Использовать для решения задачи способ подбора;

4. Переформулировать задачу другими словами, чтобы она стала более понятной и знакомой;

5. Разделить условие или вопрос задачи на части и решить ее по частям;

6. Начать решение задачи с «конца».

Детям объясняю, что данная памятка может применяться в любой последовательности или частично.

Проведённая работа позволяет мне сделать вывод о том, что нестандартные задачи благоприятно влияют на развитие математического мышления младших школьников. Кроме того, занимательная форма данных задач содействует развитию интереса учащихся начальных классов к математике, повышению их активности на уроке, повышает качество обучения математике.

Список литературы:

1. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А., «Комбинаторика», Москва, Издательство: МЦНМО, 2023 г.

2. Райгородский А.М. «Комбинаторика и теория вероятностей», Москва, Издательство: ИД Интеллект, 2013 г.

3. Румянцева И. Б., Целищева И. И. «"Занимательная комбинаторика для младших школьников. Выпуск 4», Москва, Издательство: Илекса, 2022 г.

Интернет-источники:

1. «Комбинаторные задачи в школьном курсе математики». Ресурс доступа: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=11943> (дата обращения: 10.06.2024г.)

2. «Теория вероятностей. Базовые термины и понятия. Краткий курс для начинающих». Ресурс доступа: http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html (дата обращения: 11.06.2024).



**Задачи со сказочными сюжетами.
«Попробуй реши!»**

1. У трех медведей три чашки разного цвета: красная, синяя и белая. У папы Михайло Потапыча чашка не белого цвета, а у мамы Настасьи Петровны не красная и не синяя чашка. Какого цвета чашки у каждого?

2. У трех богатырей 3 коня разной масти. У Ильи Муромца конь не гнедой (коричневый), а у Алехи Поповича не вороной (черный) и не белый. Какой масти конь у каждого богатыря?

3. Наташа, Валя и Аня вышли на прогулку, причем туфли и платье каждой были или белого, или синего, или зеленого цвета. У Наташи были зеленые туфли, а Валя не любит белый цвет. Только у Ани платье и туфли были одного цвета. Определить цвет туфель и платья каждой из девочек.

4. Бим, Бам и Бом — клоуны. Они вышли на арену в синем, зелёном и красном колпачках. И на шею завязали банты синего, зелёного и красного цвета.

У Боба ни колпак, ни бант не были синими. У Бима был зелёный колпак и бант другого цвета. У Бама колпак и бант совпадали по цвету.

Определи цвет банта и колпачка каждого клоуна.

5. Витя, Саша и Андрей смастерили из бумаги кораблик, змея и аиста. Какую игрушку сделал каждый мальчик, если Витя не сделал кораблика и змея, а Саша не делал кораблик?

6. Знайка, Кнопочка и Тюбик живут в домах №14, 17, 19. В каком доме живет каждый человек, если Знайка не живет в доме 19 и 17, а Кнопочка не живет в доме 19?

7. В школьном буфете Наташа, Яна и Алёна покупали пирожные – бисквитное с вареньем, бисквитное с кремом и трубочку с кремом. Кто что купил, если каждая девочка съела по одному пирожному, Яна и Алёна любят пирожные с кремом, а Наташа и Алёна купили себе по бисквитному пирожному?

8. У трёх подружек – Вики, Ани и Лены – очень красивые куртки – синяя и красная с капюшонами и синяя без капюшона. У кого какая куртка, если Аня и Лена ходят с капюшонами, а у Ани и Вики куртки синего цвета?

9. Вите, Пете и Андрею подарили по видеокассете: одну – с комедией, другую с веселыми мультфильмами, а третью с фантастическим фильмом. Кто что получил в подарок, если известно, что Петя и Витя не любят смотреть мультфильмы, а Андрей и Петя в процессе просмотра хохотали до упаду?

10. Три девочки – Таня, Катя и Марина – занимаются в трёх различных кружках – вышивки, танцев и хорового пения. Катя не знакома с девочкой, занимающейся танцами. Таня часто ходит в гости к девочке, занимающейся вышивкой. Подружка Кати – Марина, хочет в следующем году добавить к своим увлечениям занятия пением. Кто из девочек чем занимается?